c- En intégrant l'égalité précédente de 0 à 1 on obtient :

$$\int_0^1 f(t)dt = \int_0^1 g_1(t)dt - \int_0^1 g_3(t)dt + \ldots + (-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{g_{2n+3}(t)}{1+t^2}dt$$

$$\Leftrightarrow I = u_1 - u_3 + u_5 + \ldots + (-1)^n u_{2n+1} + (-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{g_{2n+3}(t)}{1+t^2}dt$$

3)a- On a d'après **II/2)c-**

$$I = u_1 - u_3 + u_5 + \ldots + (-1)^n u_{2n+1} + (-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{g_{2n+3}(t)}{1+t^2}dt$$

$$\Leftrightarrow I = S_n + (-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{g_{2n+3}(t)}{1+t^2}dt$$

$$\Leftrightarrow I - S_n = (-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{g_{2n+3}(t)}{1+t^2}dt$$

$$\text{D'où } |I - S_n| = \left|(-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{g_{2n+3}(t)}{1+t^2}dt\right| = \left|\int_0^1 \frac{g_{2n+3}(t)}{1+t^2}dt\right|$$

Or $\forall n \in \mathbb{N}; \forall t \in]0,1]$ on a $g_{2n+3}(t) = -t^{2n+3}\text{Log}t \geq 0$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}; \forall t \in]0,1] \text{ on a } \frac{g_{2n+3}(t)}{1+t^2} \geq 0 \Rightarrow \int_0^1 \frac{g_{2n+3}(t)}{1+t^2}dt \geq 0$$

Par suite $|I - S_n| = \int_0^1 \frac{g_{2n+3}(t)}{1+t^2}dt$

D'autre part $1 + t^2 \geq 1; \forall t \in]0,1]$

$$\Leftrightarrow \forall t \in]0,1]; \frac{1}{1+t^2} \leq 1 \Leftrightarrow \forall t \in]0,1]; \frac{g_{2n+3}(t)}{1+t^2} \leq g_{2n+3}(t)$$

Ce qui donne $\int_0^1 \frac{g_{2n+3}(t)}{1+t^2}dt \leq \int_0^1 g_{2n+3}(t)dt = u_{2n+3}$.

En conclusion : $|I - S_n| \leq u_{2n+3}$.

b- $|I - S_n| \leq u_{2n+3}; \forall n \in \mathbb{N}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+3} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} S_n = I$.

c- Pour que $|I - S_n| \leq 10^{-2}$ il suffit que $u_{2n+3} \leq 10^{-2}$ car on a déjà $|I - S_n| \leq u_{2n+3}$.

Ainsi $u_{2n+3} \leq 10^{-2} \Leftrightarrow \frac{1}{(2n+4)^2} \leq 10^{-2}$

$$\Leftrightarrow (2n+4)^2 \geq 10^2 = 100$$

$$\Leftrightarrow 2n + 4 \geq 10 \Leftrightarrow \underline{n \geq 3}$$

Ainsi pour $n_0 = 3$ on a $|I - S_3| \leq 10^{-2}$.

- $S_3 = u_1 - u_3 + u_5 - u_7 \approx 0.199$ est une valeur approchée de I à 10^{-2} prés.
- Ainsi air(E) $= I \times 36\ cm^2 \approx 0.199 \times 36 cm^2 = 7,164\ cm^2$